

طرح درس جامع دوره

«آنالیز ریاضی»

از مشتق تا توابع تحلیلی

مجید کوکبی

۱۳ مهر ۱۴۰۵

شناسنامه دوره

دانشکده	علوم ریاضی	سال تحصیلی	۱۴۰۵-۱۴۰۶
نام درس	آنالیز ریاضی	تعداد واحد	۴
مقطع	کارشناسی	پیش نیاز	ریاضی ۱ و ۲، حساب دیفرانسیل و انتگرال
تعداد ساعات تدریس در هفته	۴	نام مدرس	مجید کوکبی
شماره کلاس	۲۱۴	زمان کلاس	۱شنبه و ۳شنبه ۱۲-۱۰

جایگاه درس در برنامه درسی دوره

این درس یکی از دروس پایه و بنیادین در مقطع کارشناسی ریاضی است که دانشجو را با مفاهیم اساسی آنالیز ریاضی (مشتق، انتگرال، همگرایی، توابع با تغییر کراندار، پیوستگی مطلق، سری‌های توانی و ...) آشنا می‌کند. این درس پیش نیاز دوره‌های پیشرفته‌تری همچون آنالیز حقیقی، آنالیز تابعی، معادلات دیفرانسیل، و نظریه اندازه است و نقش کلیدی در آماده‌سازی دانشجو برای دروس تخصصی دیگر ایفا می‌کند.

هدف کلی

دانشجو باید بتواند مفاهیم بنیادی آنالیز ریاضی را درک کرده، قضایای اصلی را با اثبات کامل ارائه دهد، و توانایی تحلیل و حل مسائل آنالیز را در فضاهای متنوع (اعداد حقیقی، فضای توابع پیوسته، سری‌های توانی و ...) کسب نماید. هدف نهایی، پرورش تفکر انتزاعی، دقت در استدلال ریاضی، و توانایی تعمیم مفاهیم از حساب دیفرانسیل و انتگرال به آنالیز مدرن است.

اهداف یادگیری

تسلط نسبی دانشجو در مورد مباحث زیر و حل تمرین آن‌ها:

۱. تعریف مشتق، مشتق یک‌طرفه، و تفسیر هندسی و فیزیکی آن.

۲. اثبات قضایای اساسی مشتق: فرما، رول، مقدار میانگین، کوشی، داربو.
۳. محاسبه مشتق توابع مقدماتی و اثبات قواعد مشتق‌گیری (ضرب، تقسیم، زنجیره‌ای، معکوس).
۴. اثبات قضیه تیلور با باقیمانده‌های لاگرانژ، کوشی، و انتگرالی.
۵. محاسبه حدود با استفاده از قاعده هوییتال و بسط تیلور.
۶. تعریف انتگرال ریمان و ریمان-اشتیلیس و اثبات قضایای اساسی آن.
۷. اثبات قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (هر دو بخش).
۸. تعریف توابع با تغییر کراندار (BV) و اثبات تجزیه جردن.
۹. تعریف خم‌های طول متناهی و محاسبه طول قوس.
۱۰. تعریف پیوستگی مطلق (AC) و اثبات رابطه آن با BV و لیپ‌شیتز.
۱۱. تحلیل همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت دنباله‌ها و سری‌های توابع.
۱۲. اثبات قضایای جابه‌جایی حد و پیوستگی، انتگرال، و مشتق.
۱۳. بررسی همگرایی سری‌های توانی و محاسبه شعاع همگرایی.
۱۴. تعریف تابع گاما و اثبات خواص آن (رابطه بازگشتی، مقدار $1/2$ ، فرمول بازتاب).
۱۵. تحلیل فضای توابع پیوسته $C[a, b]$ و اثبات کامل بودن آن (فضای باناخ).
۱۶. تعریف هم‌پیوستگی و اثبات قضیه آرزولا-اسکولی.
۱۷. اثبات قضیه تقریب وایرستراس و قضیه استون-وایرستراس.
۱۸. ساخت تابع وایرستراس (پیوسته ولی همه‌جا مشتق‌ناپذیر).
۱۹. تحلیل توابع تحلیلی و بسط توابع مقدماتی به سری توانی.
۲۰. حل مسائل ترکیبی و چالشی با استفاده از چند مفهوم مختلف.

رفتار ورودی

تسلط بر مباحث مقدماتی ریاضیات همچون:

- حساب دیفرانسیل و انتگرال (مشتق، انتگرال، حد، پیوستگی).
- مفاهیم پایه‌ای نظریه مجموعه‌ها و منطق ریاضی.
- آشنایی با اعداد حقیقی و خواص آن‌ها (اصل کمال، سوپریم، اینفیمم).
- آشنایی مقدماتی با دنباله‌ها و سری‌های عددی.
- توانایی حل مسائل پایه‌ای ریاضی و استدلال منطقی.

مواد و امکانات آموزشی

- تخته سیاه/وایت برد بزرگ.
- ویدئوپروژکتور.
- دسترسی به اینترنت پایدار (برای نمایش مثال‌های تعاملی).
- منابع کتابخانه‌ای، فیلم‌های ضبط‌شده کلاس درس و ترم قبل.
- فایل‌های PDF جزوات ۹ فصل آنالیز ریاضی.
- نرم‌افزارهای ریاضی (Mathematica، Maple، Sage) — اختیاری.

برخی منابع پیشنهادی برای مطالعه

۱. رودین، والتر. *اصول آنالیز ریاضی*. ترجمه علی اکبر عالم‌زاده، نشر دانشگاهی.
۲. اپوستل، تام م. *آنالیز ریاضی*. ترجمه علی اکبر عالم‌زاده، مرکز نشر دانشگاهی.
۳. بارتل، رابرت ج. *اصول آنالیز حقیقی*. ترجمه جواد مهربانی، نشر دانشگاهی.
۴. W. Rudin. *Analysis Mathematical of Principles*. McGraw-Hill.
۵. M. T. Apostol. *Analysis Mathematical*. Addison-Wesley.
۶. G. R. Bartle. *The Real Elements of Analysis*. Wiley.
۷. سایت شخصی مدرس: <https://m.kowkabi.student.um.ac.ir>

روش تدریس

- سخنرانی و تدریس مفاهیم نظری با تأکید بر شهود هندسی و مثال‌های ملموس.
- پرسش و پاسخ تعاملی در کلاس برای تثبیت مفاهیم.
- حل مسائل نمونه و اثبات قضایا به صورت گروهی روی تخته.
- برگزاری کارگاه‌های عملی و جلسات حل تمرین.
- استفاده از ابزارهای کمک‌آموزشی بصری (نمودار، فیلم، نرم‌افزار).
- تقسیم اثبات‌های طولانی به گام‌های کوچک برای کاهش بار شناختی.

وظایف دانشجو

دانشجو باید یکی از انواع ارزشیابی غیر از امتحان که در قسمت «شیوه ارزشیابی» بیان شده است را انتخاب کند و هر هفته وظایف محوله را انجام دهد و آن را PDF کرده و به ایمیل استاد ارسال کند. وظایف شامل:

۱. تهیه جزوه دست‌نویس قبل از هر جلسه به کمک فایل‌های PDF و فیلم آموزشی ترم قبل.
۲. حضور فعال و منظم در کلاس درس و شرکت در مباحث کلاسی.
۳. حل تمرین‌های تحویلی به صورت دست‌نویس و سؤالات کتاب به صورت تایپ‌شده.
۴. انجام پروژه و/یا حل تمرینات مشکل درس که توسط استاد به عنوان تمرینات پیچیده معرفی می‌شود.
۵. ارائه سمینارهای دانشجویی در زمینه کاربرد مباحث آنالیز ریاضی در سایر علوم.

شیوه ارزشیابی

ارزشیابی شامل ۵ قسمت است که دانشجو حتماً باید قسمت آزمون‌ها را شرکت کند و از ۴ قسمت دیگر یک قسمت را به دلخواه انتخاب کند:

۱. آزمون‌ها: آزمون میان‌ترم (۶ نمره) و آزمون پایان‌ترم (۹ نمره).
۲. تهیه جزوه دست‌نویس: قبل از هر جلسه به کمک فایل‌های PDF و فیلم آموزشی ترم قبل (امتیازدهی هفتگی).
۳. حضور فعال و منظم: در کلاس درس و شرکت در مباحث کلاسی.
۴. حل تمرین: سؤالات تحویلی به صورت دست‌نویس و سؤالات کتاب به صورت تایپ‌شده.
۵. پروژه: انجام پروژه و/یا حل تمرینات مشکل درس که توسط استاد معرفی می‌شود.

جمع نمرات:

توضیحات	سهم از نمره کل	روش ارزیابی
تحویل تمرینات هفتگی و مشارکت در کلاس	۳ نمره	حل تمرین و فعالیت کلاسی
تا پایان فصل ۴ (همگرایی)	۶ نمره	آزمون میان‌ترم
استفاده از نرم‌افزار یا مقاله کوتاه	۲ نمره	پروژه (اختیاری/اجباری)
شامل تمام مباحث با تأکید بر فصول پیشرفته	۹ نمره	آزمون پایان‌ترم
	۲۰ نمره	جمع کل

زمان‌بندی جلسات (تقویم آموزشی)

جلسه	موضوع درس	شرح مختصر
۱	مشتق: تعریف و تفسیر	تعریف مشتق، مشتق یک‌طرفه، تفسیر هندسی و فیزیکی، پیوستگی و مشتق‌پذیری
۲	قضایای اساسی مشتق	قضیه فرما، رول، مقدار میانگین، (MVT) کوشی
۳	مشتق توابع مقدماتی	مشتق توابع مثلثاتی، لگاریتمی، نمایی، معکوس مثلثاتی، قاعده زنجیره‌ای

جلسه	موضوع درس	شرح مختصر
۴	قضیه تیلور و کاربردها	بسط تیلور، باقیمانده‌های لاگرانژ، کوشی، انتگرالی، محاسبه حدود
۵	قاعده هوییتال و داربو	فرم‌های نامعین، اثبات هوییتال، قضیه داربو، خواص مشتق
۶	انتگرال ریمان	افراز، مجموع بالا و پایین، شرط ریمان، انتگرال‌پذیری توابع پیوسته
۷	قضیه اساسی حساب	قضیه اساسی (بخش اول و دوم)، تغییر متغیر، جزء به جزء
۸	انتگرال ناسره	انتگرال ناسره نوع اول و دوم، آزمون مقایسه، p -انتگرال
۹	توابع با تغییر کراندار (BV)	تعریف تغییر، تجزیه جردن، خواص BV، ناپیوستگی‌های BV
۱۰	خم‌های طول متناهی و AC	طول قوس، خم‌های طول متناهی، پیوستگی مطلق، (AC) رابطه BV و AC
۱۱	همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت	دنباله‌های توابع، همگرایی نقطه‌وار، همگرایی یکنواخت، معیار کوشی
۱۲	جابه‌جایی حد و انتگرال/مشتق	قضیه دینی، جابه‌جایی حد و انتگرال، جابه‌جایی حد و مشتق
۱۳	سری‌های توابع	سری‌های توابع، آزمون‌های وایرستراس M ، دیریکله، آبل
۱۴	سری‌های توانی	شعاع همگرایی، فرمول کوشی-هادامار، مشتق‌پذیری، بسط توابع مقدماتی
۱۵	تابع گاما و بتا	تعریف گاما، رابطه بازگشتی، مقدار $1/2$ ، فرمول بازتاب، تابع بتا
۱۶	فضای $C[a, b]$	نرم سوپریم، کامل بودن $C[a, b]$ ، فضای باناخ
۱۷	هم‌پیوستگی	تعریف هم‌پیوستگی، رابطه با کراندار، قضیه آرزولا-اسکولی
۱۸	تقریب توابع	قضیه تقریب وایرستراس، چندجمله‌ای‌های برنشتاین، قضیه استون-وایرستراس
۱۹	تابع وایرستراس	ساخت تابع وایرستراس، اثبات پیوستگی، اثبات مشتق‌ناپذیری
۲۰	توابع تحلیلی	توابع تحلیلی، یکتایی ضرایب، بسط توابع مقدماتی، کاربردها
۲۱	مرور و جمع‌بندی	جدول قضایا، مسائل ترکیبی، اشتباهات رایج، نکات امتحانی
۲۲	حل تمرین‌های ترکیبی	مسائل ترکیبی و چالشی، حل تمرین‌های فصل‌های ۱ تا ۷
۲۳	پروژه و ارائه	ارائه پروژه‌های دانشجویی، بحث و بازخورد
۲۴	مرور نهایی	مرور نهایی، آماده‌سازی برای امتحان پایان‌ترم

شرح تفصیلی جلسات

جلسه ۱: مشتق — تعریف و تفسیر

- شروع جلسه (۱۰ دقیقه): مرور پیش‌نیازها + ایجاد انگیزه با مثال سرعت لحظه‌ای.

- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): تعریف مشتق، مشتق یک‌طرفه، تفسیر هندسی (خط مماس) و فیزیکی (سرعت، شتاب).
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه مشتق توابع ساده با تعریف حدی.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل مثال‌های نقض (تابع قدر مطلق).
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف + پیش‌نیاز جلسه بعد.

جلسه ۲: قضایای اساسی مشتق

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور تعریف مشتق + مثال ساده.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): قضیه فرما، رول، مقدار میانگین، کوشی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): اثبات گروهی قضیه رول و MVT.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل شرایط قضایا + مثال نقض.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات MVT).

جلسه ۳: مشتق توابع مقدماتی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور قضایای مشتق + مثال مشتق $\sin x$.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): مشتق توابع مثلثاتی، لگاریتمی، نمایی، معکوس مثلثاتی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه مشتق توابع مرکب با قاعده زنجیره‌ای.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل خطاهای رایج.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (مشتق توابع مرکب).

جلسه ۴: قضیه تیلور و کاربردها

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور مشتق مرتبه بالا + مثال تقریب.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): بسط تیلور، باقیمانده لاگرانژ، کوشی، انتگرالی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه حدود با بسط تیلور.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل دقت تقریب.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (بسط تیلور e^x).

جلسه ۵: قاعده هوپیتال و داربو

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور تیلور + مثال فرم نامعین.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): فرم‌های نامعین، اثبات هوپیتال، قضیه داربو.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه حدود با هوپیتال.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل دام‌های هوپیتال.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (محاسبه حد).

جلسه ۶: انتگرال ریمان

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور مشتق + انگیزه با مساحت زیر نمودار.
- مفهوم سازی (۲۵ دقیقه): افراز، مجموع بالا و پایین، شرط ریمان.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه انتگرال با تعریف.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل انتگرال پذیری توابع پیوسته.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (محاسبه $\int_0^1 x^2 dx$).

جلسه ۷: قضیه اساسی حساب

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور انتگرال ریمان + مثال.
- مفهوم سازی (۲۵ دقیقه): قضیه اساسی (بخش اول و دوم).
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه انتگرال با پادمشتق.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل تغییر متغیر و جزء به جزء.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (محاسبه انتگرال).

جلسه ۸: انتگرال ناسره

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور انتگرال معین + مثال ناسره.
- مفهوم سازی (۲۵ دقیقه): انتگرال ناسره نوع اول و دوم، آزمون مقایسه.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): بررسی همگرایی انتگرال های ناسره.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل p -انتگرال.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (بررسی همگرایی).

جلسه ۹: توابع با تغییر کراندار (BV)

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور انتگرال + انگیزه با توابع غیریکنوا.
- مفهوم سازی (۲۵ دقیقه): تعریف تغییر، تجزیه جردن، خواص BV.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه تغییر توابع مختلف.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل ناپیوستگی های BV.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (محاسبه تغییر).

جلسه ۱۰: خم‌های طول متناهی و AC

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور BV + مثال خم.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): طول قوس، خم‌های طول متناهی، پیوستگی مطلق.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه طول قوس دایره و سهمی.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل رابطه AC و BV.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (محاسبه طول قوس).

جلسه ۱۱: همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور AC + انگیزه با دنباله توابع.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): همگرایی نقطه‌وار، همگرایی یکنواخت، معیار کوشی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): بررسی همگرایی دنباله‌های توابع.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل تفاوت نقطه‌وار و یکنواخت.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (بررسی همگرایی).

جلسه ۱۲: جابه‌جایی حد و انتگرال/مشتق

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور همگرایی + مثال.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): قضیه دینی، جابه‌جایی حد و انتگرال، جابه‌جایی حد و مشتق.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): بررسی جابه‌جایی در مثال‌ها.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل مثال‌های نقض.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (بررسی جابه‌جایی).

جلسه ۱۳: سری‌های توابع

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور جابه‌جایی + مثال سری.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): سری‌های توابع، آزمون‌های وایرشتراس M ، دیریکله، آبل.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): بررسی همگرایی سری‌های توابع.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل شرایط آزمون‌ها.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (بررسی همگرایی سری).

جلسه ۱۴: سری‌های توانی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور سری‌های توابع + مثال.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): شعاع همگرایی، فرمول کوشی-هادامار، مشتق‌پذیری.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه شعاع همگرایی.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل بسط توابع مقدماتی.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (محاسبه شعاع).

جلسه ۱۵: تابع گاما و بتا

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور سری توانی + انگیزه با فاکتوریل.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): تعریف گاما، رابطه بازگشتی، مقدار $1/2$ ، فرمول بازتاب، تابع بتا.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه $\Gamma(5)$ ، $\Gamma(3/2)$ ، $\Gamma(7/2)$.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل رابطه گاما و بتا.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (محاسبه گاما).

جلسه ۱۶: فضای $C[a, b]$

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور گاما + انگیزه با فضای توابع.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): نرم سوپریم، کامل بودن $C[a, b]$ ، فضای باناخ.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): محاسبه نرم سوپریم توابع مختلف.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل کامل بودن $C[a, b]$.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (محاسبه نرم).

جلسه ۱۷: هم‌پیوستگی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور $C[a, b]$ + مثال.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): تعریف هم‌پیوستگی، رابطه با کران‌داری.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): بررسی هم‌پیوستگی خانواده‌های توابع.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل قضیه آرزولا-اسکولی.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (بررسی هم‌پیوستگی).

جلسه ۱۸: تقریب توابع

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور هم‌پیوستگی + مثال تقریب.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): قضیه تقریب وایرستراس، چندجمله‌ای‌های برنشتاین، استون-وایرستراس.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): تقریب $|x|$ با چندجمله‌ای.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل شرایط استون-وایرستراس.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (تقریب تابع).

جلسه ۱۹: تابع وایرستراس

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور تقریب + انگیزه با تابع عجیب.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): ساخت تابع وایرستراس، اثبات پیوستگی، اثبات مشتق‌ناپذیری.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): تحلیل گام‌های اثبات مشتق‌ناپذیری.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل پیامدهای فلسفی.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (بررسی تابع).

جلسه ۲۰: توابع تحلیلی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور وایرستراس + مثال.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): توابع تحلیلی، یکتایی ضرایب، بسط توابع مقدماتی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): بسط توابع مقدماتی به سری توانی.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل تفاوت C^∞ و تحلیلی.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (بسط تابع).

جلسه ۲۱: مرور و جمع‌بندی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور کلی + نقشه مفهومی.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): جدول قضایا، ارتباط مفاهیم.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): حل مسائل ترکیبی.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل اشتباهات رایج.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + نکات امتحانی.

جلسه ۲۲: حل تمرین‌های ترکیبی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور جمع‌بندی + مثال.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): حل مسائل ترکیبی و چالشی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): حل تمرین‌های فصل‌های ۱ تا ۷.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): تحلیل راه‌حل‌ها.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف.

جلسه ۲۳: پروژه و ارائه

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور تمرین‌ها + معرفی پروژه‌ها.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): ارائه پروژه‌های دانشجویی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): بحث و بازخورد پروژه‌ها.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): ارزیابی پروژه‌ها.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + مسیر ادامه.

جلسه ۲۴: مرور نهایی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور کلی + نقشه راه.
- مفهوم‌سازی (۲۵ دقیقه): مرور نهایی مفاهیم کلیدی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): حل نمونه سؤالات امتحانی.
- بحث و بازخورد (۱۵ دقیقه): رفع اشکالات نهایی.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + آرزوی موفقیت.

نقشه راه یادگیرنده دوره آنالیز ریاضی

مسیر گام‌به‌گام

- هفته ۱-۲: مشتق، قضایای اساسی، مشتق توابع مقدماتی.
- هفته ۳-۴: تیلور، هوییتال، داربو، مشتق برداری.
- هفته ۵-۶: انتگرال ریمان، قضیه اساسی، انتگرال ناسره.
- هفته ۷-۸: توابع BV، خم‌های طول متناهی، پیوستگی مطلق.
- هفته ۹-۱۰: همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت، جابه‌جایی حد.
- هفته ۱۱-۱۲: سری‌های توابع، سری‌های توانی، تابع گاما.
- هفته ۱۳-۱۴: فضای $C[a, b]$ ، هم‌پیوستگی، آرزولا-اسکولی.
- هفته ۱۵-۱۶: تقریب، وایرشراس، توابع تحلیلی، مرور نهایی.

سه نقطه عطف کلیدی

۱. جلسه ۲: اثبات قضیه مقدار میانگین — درک قدرت MVT در اثبات نامساوی‌ها.
۲. جلسه ۱۱: تفاوت همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت — درک عمیق‌تر از حد توابع.
۳. جلسه ۱۹: تابع وایرستراس — درک اینکه پیوستگی و مشتق‌پذیری دو مفهوم مستقل هستند.

سه چالش پیش‌بینی‌شده و راهکار عبور

۱. چالش: انتزاعی بودن اثبات‌های ϵ - δ . راهکار: تمرین گام‌به‌گام + مثال‌های ملموس.
۲. چالش: تفاوت همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت. راهکار: مثال‌های نقض + تحلیل سوپرمم.
۳. چالش: ارتباط مفاهیم مختلف، (BV، AC، همگرایی). راهکار: جدول مقایسه + نقشه مفهومی.

جمله انگیزشی

«آنالیز ریاضی، زبان دقیق تغییر و حرکت است — و شما در آستانه تسلط بر این زبان هستید.»

چک‌لیست خودارزیابی پایان دوره

- ✓ می‌توانم مشتق را با تعریف حدی محاسبه کنم.
- ✓ می‌توانم قضیه رول و MVT را اثبات کنم.
- ✓ می‌توانم بسط تیلور توابع را بنویسم.
- ✓ می‌توانم با هوپیتال حد محاسبه کنم.
- ✓ می‌توانم انتگرال ریمان را با تعریف محاسبه کنم.
- ✓ می‌توانم قضیه اساسی حساب را اثبات کنم.
- ✓ می‌توانم همگرایی انتگرال ناسره را بررسی کنم.
- ✓ می‌توانم تغییر کراندار یک تابع را محاسبه کنم.
- ✓ می‌توانم طول قوس یک خم را محاسبه کنم.
- ✓ می‌توانم همگرایی نقطه‌وار و یکنواخت را تشخیص دهم.
- ✓ می‌توانم جابه‌جایی حد و انتگرال را بررسی کنم.
- ✓ می‌توانم شعاع همگرایی سری توانی را محاسبه کنم.
- ✓ می‌توانم تابع گاما را محاسبه کنم.
- ✓ می‌توانم کامل بودن $C[a, b]$ را اثبات کنم.
- ✓ می‌توانم هم‌پیوستگی یک خانواده توابع را بررسی کنم.
- ✓ می‌توانم قضیه استون-وایرستراس را بیان کنم.

- ✓ می‌توانم تابع وایرستراس را تحلیل کنم.
- ✓ می‌توانم توابع تحلیلی را بسط دهم.
- ✓ می‌توانم مسائل ترکیبی را حل کنم.
- ✓ می‌توانم پروژه تحلیلی ارائه کنم.